

THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 12

Exercice 1. *À faire après chaque cours!*

Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

Exercice 2. (facile) Soit

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$$

une suite exacte courte de groupes telle que F soit un groupe libre. Montrez que la suite est scindée.

Exercice 3. (facile) Soit F un groupe libre sur un ensemble S où $|S| \geq 2$. Montrez que F est sans torsion et possède un centre trivial.

Exercice 4. (facile) Soient X et Y des ensembles disjoints. Soit N le sous-groupe normal de $F_{X \cup Y}$ engendré par Y . Montrez que $F_{X \cup Y}/N \cong F_X$.

Exercice 5. (moyen) *Le groupe des Quaternions*

Considérez le groupe

$$Q_8 := \langle i, j, k \mid i^4 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = ijk \rangle.$$

Le groupe Q_8 est appelé le groupe des Quaternions.

- (1) Définissez l'élément $-1 := i^2$. Montrez que -1 est dans le centre de Q_8 .
- (2) Montrez que Q_8 est un groupe fini d'ordre 8.
- (3) Trouvez le centre de Q_8 .
- (4) Montrez que tous les sous-groupes de Q_8 sont normaux.

Exercice 6. (moyen) Calculez les abélianisés des groupes suivants :

- (1) A_5 ,
- (2) A_4 ,
- (3) S_n pour $n \geq 5$,
- (4) F_S où $|S| = 2$,
- (5) $\langle a, b \mid a^2b^3, a^4b^5 \rangle$.

Exercice 7. (difficile)

- (1) Montrez que $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- (2) Montrez que $\langle x, y \mid x^3 = 1, y^3 = 1, (xy)^2 = 1 \rangle \cong A_4$.
- (3) Prouvez que A_5 peut être engendré par un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 2.
- (4) Prouvez que F_S n'est pas résoluble lorsque $|S| \geq 2$.